

Controle Linear

Sumário

Definição	1
Controle por Realimentação	2
Sistemas lineares invariantes no tempo (LIT)	4
Transformada de Laplace	13
Funções de Transferência	15
Diagrama de Blocos	24
Modelos de Estado	27
Relação entre função de transferência e modelo de estado	28
Realimentação de Estados	34
Crítério de Routh-Hurwitz	36

Definição

Sistemas dinâmicos são sistemas que tem comportamento descrito de maneira causal ao longo do tempo.

Abordam-se nesse curso sistemas modelados por equações diferenciais (lineares e invariantes no tempo, quase sempre).

A modelagem serve para prever comportamento e prever a relação entre entradas e saídas a ser imposta para obter

um comportamento. O controle procura obter um comportamento e para isso necessita de instrumentação: sensores e atuadores.

A figura abaixo esquematiza um sistema de controle de posição no qual não há realimentação, um esquema de controle em malha aberta. Nesse exemplo, uma referência a ser seguida é fornecida para o controlador, o qual aciona o atuador e gera a entrada que leva o sistema para a posição desejada.

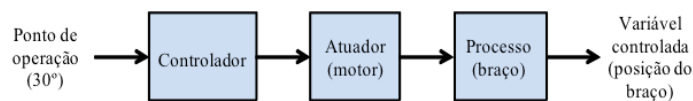


Figura 1: Diagrama de blocos.

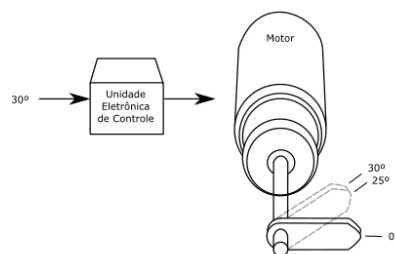


Figura 2: Sistema de posição em malha aberta.

Controle por Realimentação

A robustez é alcançada pela observação contínua: o sinal desejado é comparado com o obtido. A realimentação permite corrigir o erro (diferença entre saída medida e saída desejada) continuamente.

A realimentação configura uma malha fechada, com a presença de um ramo direto e um ramo inverso (ramo da realimentação). Nesse esquema de controle de posição apresentado, o controlador está posicionado no ramo direto, mas em outra configuração poderia ser posicionado no ramo inverso.

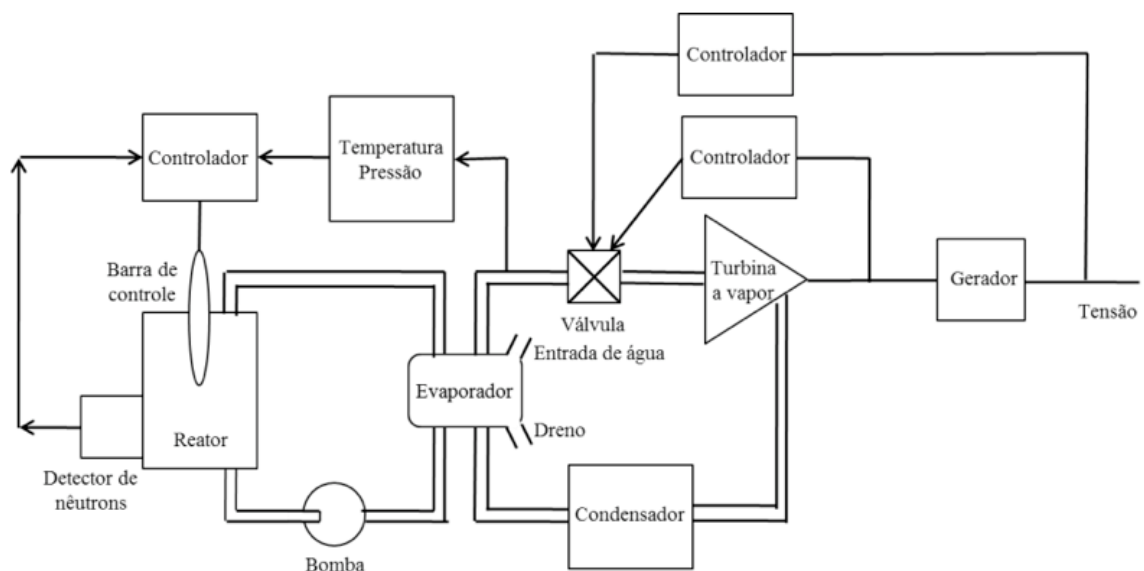
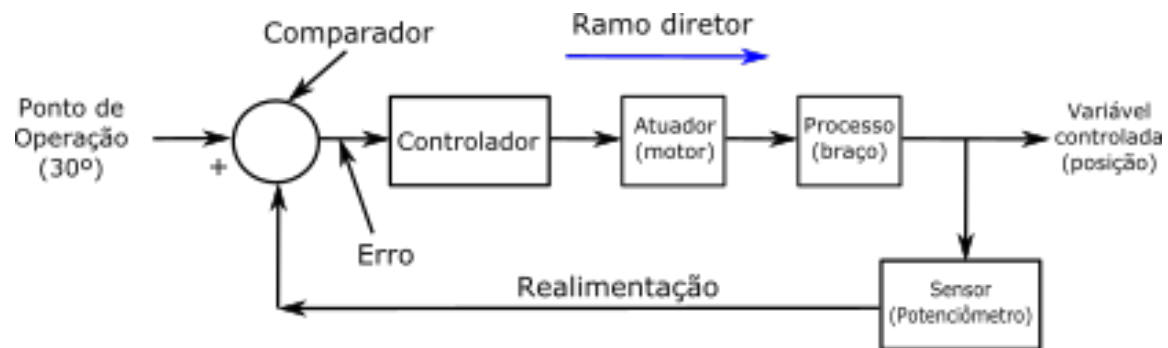
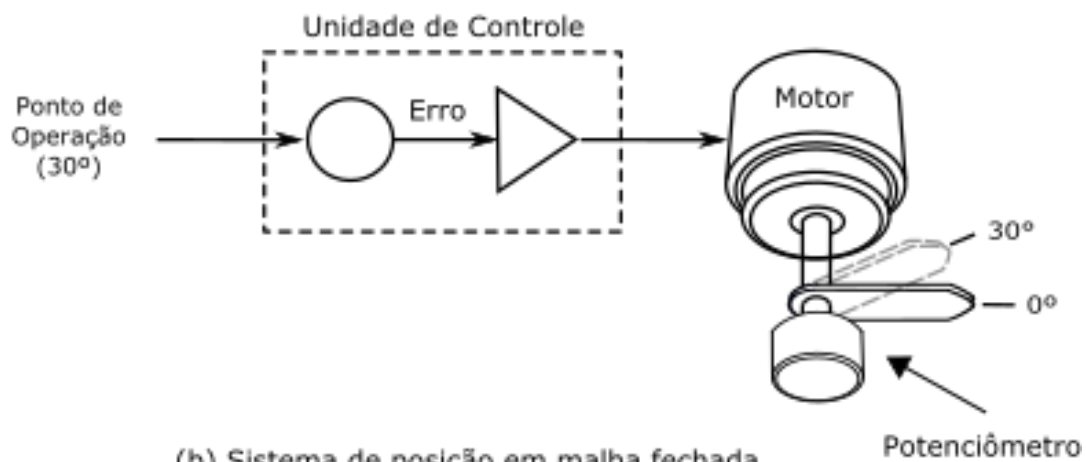


Figura 3: Exemplo de sistema de controle complexo.



(a) Diagrama de Blocos



(b) Sistema de posição em malha fechada

Figura 4: Tipos de malhas de controle.

Sistemas lineares invariantes no tempo (LIT)

Podem ser representados por equações diferenciais com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, sendo a ordem n do sistema aquela da equação.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = d_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + d_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Os parâmetros dessas equações diferenciais são constantes no tempo. A aplicação de leis da física (por exemplo, Leis de Newton para o caso de sistemas mecânicos) permite descrever os sistemas LIT por meio de equações diferenciais na forma apresentada.



Exemplo

Tanques que se comunicam

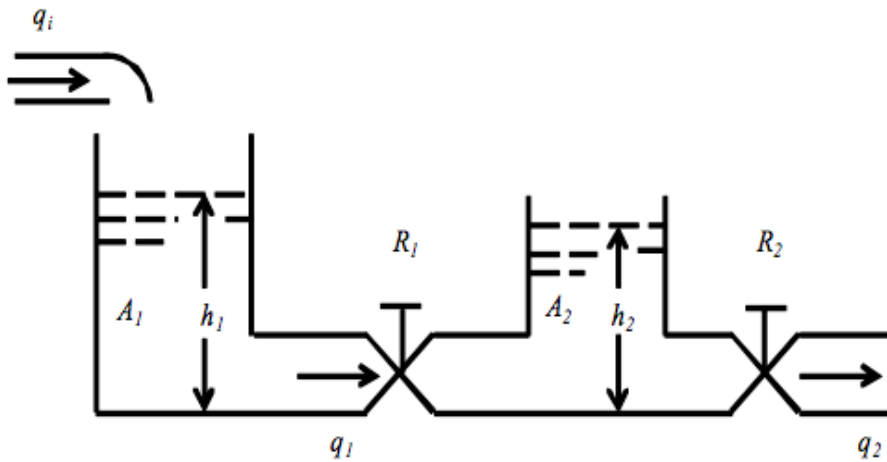
Em plantas químicas, é necessário manter o nível de líquidos. Um modelo simplificado é mostrado na figura abaixo, na qual:

q_0, q_1, q_2 = taxas de fluxo do líquido;

A_1, A_2 = Área de seção dos tanques;

h_1, h_2 = níveis de líquido;

R_1, R_2 = resistência de fluxo, controlada por válvulas.



Assumindo q_1 e q_2 proporcionais aos níveis relativos de líquido e inversamente proporcionais às resistências de fluxo, são governados por:

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{h_2}{R_2}.$$

As variações de níveis de líquidos são governadas por:

$$A_1 dh_1 = (q_i - q_1)dt$$

$$A_2 dh_2 = (q_1 - q_2)dt$$

o que implica

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_i - q_1$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

Estas equações são obtidas por linearização e aproximação. Na realidade, o fluxo de líquido é muito complexo e isso pode envolver fluxos turbulen-

tos, que não podem ser descritos por equações diferenciais lineares. Para simplificar a análise, fluxo turbulento é desconsiderado no desenvolvimento. Sejam q_i e q_2 entrada e saída do sistema. Agora pretendemos desenvolver uma equação diferencial para descrevê-las. A diferenciação de rendimento fornece:

$$\frac{dh_2}{dt} = R_2 \frac{dq_2}{dt}$$
$$\frac{dh_1}{dt} = R_1 \frac{dq_1}{dt} + \frac{dh_2}{dt} = R_1 \frac{dq_1}{dt} + R_2 \frac{dq_2}{dt}$$

Agora termine o desenvolvimento e obtenha uma equação diferencial de segunda ordem relacionando entrada e saída do sistema.

Solução:

Igualando-se as duas equações definidas para $\frac{dh_1}{dt}$ temos:

$$R_1 \frac{dq_1}{dt} + R_2 \frac{dq_2}{dt}$$
$$= \frac{q_i - q_1}{A_1} = \frac{1}{A_1} q_i - \frac{1}{A_1} q_1$$

Para escrever uma equação diferencial relacionando a saída q_2 com a entrada q_i é necessário eliminar as termos dependentes de q_1 na equação diferencial anterior. Para isso, tomam-se as seguintes relações já mostradas:

$$q_1 = q_2 + A_2 \frac{dh_2}{dt}$$

$$\text{e } h_2 = R_2 q_2.$$

Assim é possível isolar q_1 e $\frac{dq_1}{dt}$:

$$q_1 = q_2 + A_2 R_2 \frac{dq_2}{dt}$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} + A_2 R_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2}$$

Substituição de q_1 e $\frac{dq_1}{dt}$ na primeira equação diferencial:

$$\begin{aligned} R_1 \left(\frac{dq_2}{dt} + A_2 R_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right) + R_2 \frac{dq_2}{dt} \\ = \frac{1}{A_1} q_i - \frac{1}{A_1} \left(q_2 + A_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} \right) \end{aligned}$$

Desenvolvendo essa equação obtém-se:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 R_1 R_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} \\ + (A_1 R_1 + A_1 R_2 + A_2 R_1) \frac{dq_2}{dt} + q_2 = q_i \end{aligned}$$

Essa é a equação diferencial de segunda ordem que relaciona a entrada com a saída do sistema de dois tanques interligados.